

一种基于压缩感知的改进全变分图像去噪方法

徐立军, 杨秋翔, 雷海卫

(中北大学 计算机与控制工程学院, 山西 太原 030051)

摘 要: 提出了一种基于压缩感知理论的改进的全变分算法来实现图像的去噪. 该方法中, 首先对含噪图像进行稀疏表示, 然后采用高斯随机矩阵进行测量, 最后通过全变分(TV)算法重建图像. 仿真实验表明, 与传统的去噪方法相比, 该方法能有效地去除图像中的噪声, 获得更高的峰值信噪比, 并且图像的边缘细节得到了很好的保护, 验证了算法的有效性.

关键词: 压缩感知; 图像去噪; 稀疏表示; 图像处理; 全变分算法

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2016)06-0100-04

An Improved Total Variation for Image Denoising Based on Compressed Sensing

XU Li-jun, YANG Qiu-xiang, LEI Hai-wei

(School of Computer and Control Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: This paper uses the improved total variation for image denoising based on compressed sensing. In this method, noisy image is transformed and sensed through a Gaussian random projection, then original images is reconstructed using the total variation reconstruction algorithms. Simulation experiments show that comparing to the original method, the method can eliminate the noise in image effectively and get a higher peak signal to noise ratio, and the image detail can be well protected and proves the efficiency of the algorithm.

Key words: compressed sensing; image denoising; sparse representation; image processing; total reconstruction algorithm

1 引言

近年来, 国内外对图像去噪的研究有多种, 现有的去噪方法分为空间域去噪方法和变换域去噪方法^[1]. 空间域去噪方法主要有均值滤波法、高斯滤波法、中值滤波法等. 它能够有效抑制加性噪声, 但均值滤波法和高斯滤波法很容易在降噪过程中模糊图像的边缘信息. 中值滤波法虽然可以在图像去噪过程中保持图像的边缘信息, 但对图像中的细节处理不理想. 变换域去噪方法主要是对含噪图像进行变化, 如离散余弦变换(DCT)、小波变换等去噪方法. 基于小波变换的图像去噪方法在去噪的同时能够较好地保持图像的细节, 在均方差(MSE)和 PSNR 等方面优于传统的均值法、中值滤波法等比较经典的

去噪方法. 近年来, 基于偏微分方程的图像处理方法在图像去噪和去模糊等方面有着良好的应用效果. 其中基于全变分模型的图像去噪能够获得较好的去噪效果, 但其得到的图像无法保持较好的边缘, 容易产生“阶梯”效应. 目前压缩感知(CS)^[2]理论在信号去噪重建研究中取得了良好的效果. 该理论突破了传统的香农采样定理, 将压缩与采样合二为一, 以远低于奈奎斯特采样数据精确地恢复出原始信号, 大大节省了资源和存储成本. 根据 CS 理论, 首先通过稀疏变换得到含噪图像稀疏表示, 在运用优化算法恢复出原始图像, 从而去除噪声. 基于压缩感知图像去噪能够充分发挥稀疏表示的优点, 直接获得稀疏的信号进行表示, 降低了采样率和数据处理的成本, 获取较好的去噪效果.

为了有效抑制噪声,获得更好的去噪效果,在前人研究的基础上,将新兴的压缩感知方法应用到图像去噪中,对全变分模型进行改进,在有效减少噪声的同时,保护图像的边缘细节,以实现图像的重建和噪声的去除效果,提高图像的质量.

2 压缩感知理论及主要进展

压缩感知作为一种新的采样理论,其核心思想是压缩和采样合并,其测量值远小于 Nyquist 采样定理的采样率获取采样信号,然后通过重构算法对信号进行重构. 压缩感知理论指出,当信号在某一正交空间是可压缩或稀疏的,就能以较低的频率采样信号,然后通过优化算法根据观测值高概率的重构出原信号. 通过压缩感知采样降低了采样率,直接获得信号表示,节省了信息的获取时间和存储空间.

2.1 信号的稀疏表示

设 x 为一个长度为 N 的信号,可以有某组规范正交基 $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]$ 的线性组合 s 来表示,则 x 可以表示为

$$x = \Psi s \tag{1}$$

稀疏基 Ψ 为 $N \times N$ 矩阵,稀疏系数 s 为 N 维向量,当信号 x 在某个基 Ψ 上,若 s 的非零分量的个数为 k ,仅有 $k \ll N$ 时,称 Ψ 为信号 x 的稀疏基.

信号在冗余字典下的稀疏分解是研究的另外一个热点^[3]. 如何构造一个适合某一类信号的正交基和如何设计快速有效的稀疏分解算法,以求得信号的最稀疏表示,是进一步研究的重点.

2.2 观测矩阵的设计

信号的稀疏性由稀疏系数 s 决定. 所以,需要设计一个大小为 $M \times N (M \ll N)$ 测量矩阵 Φ 对信号 x 进行线性测量,得到测量值 $y: y = \Phi x$,由于 x 可

稀疏表示, $x = \sum_{i=1}^N \Psi_i s = \Psi s$, 则有

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s \tag{2}$$

观测矩阵的图形表示如图 1 所示.

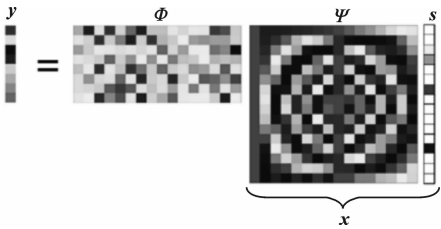


图 1 观测矩阵的图形表示

其中, Θ 为观测矩阵,大小为 $M \times N$. $\Theta = \Phi \Psi$ 为 $M \times$

N 矩阵,称为投影矩阵. y 被叫做 s 投影矩阵下的测量值. 由于观测值远小于信号的长度,因此信号重构变成了一个求解欠定方程组的问题. 但若测量矩阵 y 满足有限等距性质(RIP),即满足:

$$1 - \epsilon_k \leq \frac{\|\Phi x\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq 1 + \epsilon_k \tag{3}$$

式中, x 为严格 K 稀疏信号,常数 $\epsilon_k \in (0, 1)$, 则信号 x 能够高概率地重构. Θ 是否具有 RIP 性质由 Φ 和 Ψ 的相干性决定. 若 Φ 和 Ψ 不相干,则 K 个系数能够从 M 个测量值高概率的重构. 目前,常用的压缩感知测量矩阵主要有: 稀疏随机矩阵、傅里叶随机矩阵、高斯随机矩阵^[4] 等.

2.3 信号的重构算法

当传感矩阵 Θ 满足约束等距性质 RIP 时,式(2)中 s 的求解可转化为 l_0 范数下求解的最优化问题:

$$s = \operatorname{argmin} \|s\|_{l_0} \text{ s.t. } y = \Phi \Psi s \tag{4}$$

显然 l_0 为 NP-Hard 的非凸优化问题. 由于最小 l_0 与 l_1 范数问题在一定条件下是等价的. 故上式转化为 l_1 最小范数下的最优化问题:

$$s = \operatorname{argmin} \|s\|_{l_1} \text{ s.t. } y = \Phi \Psi s \tag{5}$$

这一简单的转化使问题简化为求解线性规划问题. 目前,求解该问题的算法有多种,如贪婪追踪算法及基追踪(BP) 算法^[5] 等.

3 基于压缩感知的图像去噪

3.1 全变分图像去噪的基本原理

图像的全变分^[6-7] (Total variation, TV) 去噪模型是由 Rudin, Osher and Fatemi 等人提出的,它将图像的去噪问题转化为一个能量泛函的求极值问题,然后通过建立能量函数、求取能量最小值的方法,使得图像达到平滑状态,成为比较主流的图像复原方法之一. 压缩感知的核心思想是同时进行压缩与采样,直接对信息进行测量,通过稀疏变换,使得多数噪声被去除,最后通过重构算法对 M 维噪声进行重建,从而实现图像的恢复和噪声的去除. 首先将混有噪声的图像 X 进行稀疏变换,获得变换后的稀疏系数 θ ,即含噪图像表示为: $(x + z) = \Psi \theta$, 式中 x 为干净图像, z 为加性噪声. 然后设计 $M \times N (M \ll N)$ 测量矩阵 Φ , 通过测量矩阵 Φ 对变换后稀疏向量 θ 进行测量,获得测量向量 y , 即: $y = \Phi \theta$. 最后由测量向量 y 通过 TV 算法恢复图像信号 $\hat{x}$, 去除图像信号 x 中的噪声.

3.2 改进的全变分图像去噪算法

目前国内涉及到的大部分算法都是基于加性噪

声模型,即:

$$u_0(x, y) = u(x, y) + n(x, y) \quad (6)$$

式中, n 为具有零均值, 方差为 σ^2 的随机噪声. 图像重构就是在满足观测值的条件下获得信号最稀疏解的过程, 因此 TV 图像去噪问题可以看成为 Lagrange 方程的最小化问题:

$$\min TV(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u(x, y)| dx dy \quad (7)$$

一般 TV 模型的最小化能量泛函形式如下:

$$E(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy + TV(u) \quad (8)$$

式中, u_0 为噪声图像, u 为去噪后的图像. 式中第一项为数据保真项, 主要作用在最小化过程中可抑制噪声; 第二项为正则化项, 保证恢复出来的图像光滑, 达到去除噪声的目的; λ 为规整参数, 平衡去噪与图像平滑, 是图像去噪的关键.

为了使 $E(u)$ 最小, 其欧拉-拉格朗日方程为

$$-\nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - u_0) = 0 \quad (9)$$

当扩散项 ∇ 的参数 $\frac{1}{|\nabla u|}$ 较大时易产生伪边缘,

$\frac{1}{|\nabla u|}$ 较小时会对图像过度平滑, 而造成边缘模糊, 纹理和细节区域丢失, 也可能会产生“阶梯效应”.

本文对 TV 模型进行了改进, 对非线性扩散项引入了边缘引导函数 $g(|\nabla u|)$, $g(|\nabla u|)$ 的值较大时, 可实现强平滑, 能去除噪声; $g(|\nabla u|)$ 的值较小时, 从而降低平滑, 在去除噪声的同时较好地保持图像的边缘细节. 其欧拉-拉格朗日方程为

$$-g(|\nabla u|) \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - u_0) = 0 \quad (10)$$

修改的扩散函数为

$$g(|\nabla u|) = \begin{cases} 1, & |\nabla u| = 0 \\ \left| \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2 \right|, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在由梯度下降法转化为偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u|) \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(u - u_0) \quad (11)$$

其中梯度算子为

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (12)$$

写出合适的数值离散计算格式, 进行迭代求解:

$$\begin{cases} \lambda(t)^{n+1} = \frac{\int_{\Omega} g(\nabla u^{n+1}) \nabla \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^{n+1}|} \right) (u^{n+1} - u_0) dx dy}{\int_{\Omega} (u^{n+1} - u_0)^2 dx dy} \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = [g(\nabla u) \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)]_{i,j}^n - \lambda u_{i,j}^n - (u_0)_{i,j}^n \end{cases} \quad (13)$$

式中, n 为迭代次数, $i, j = 0, 1, \dots, N$; Δt 表示时间步长. 当 $n = 0$ 时刻, 选取初值进行迭代, 迭代终止时刻的图像就是去噪后的图像.

本文选取大小为 256×256 的 fruits 标准测试图像, 测量矩阵选用高斯随机矩阵, 稀疏基采用 DCT 基, 重构 TV 算法. 具体实现步骤如下:

(1) 选取大小为 256×256 的标准测试图像 fruits, 将干净图像加入噪声;

(2) 对图像进行离散余弦变换, 得到稀疏系数.

(3) 然后对变换域的系数进行量化处理, 构成一个系数矩阵;

(4) 对系数矩阵进行压缩编码;

(5) 利用全变分算法解码重构图像, 计算峰值信噪比 PSNR.

$$\text{PSNR} = 10 \times \lg \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right) \quad (14)$$

式中, MSE 为归一化处理后的均方根误差, 其计算公式为

$$\text{MSE} = \frac{\sum (\Psi(x, y) - \Psi'(x, y))^2}{M \times N} \quad (15)$$

式中, $M \times N$ 代表图像的尺寸大小, $\Psi(x, y)$ 、 $\Psi'(x, y)$ 则分别代表原图像和压缩重建后图像在点 (x, y) 处的灰度值.

4 仿真实验及其实验结果

实验基于 PC 机平台, 并用 Matlab R2013b 实现程序仿真. 本文选用标准测试图像 fruits, lena, 大小为 256×256 , 首先添加了均值为 0, 标准差分别为 25 的高斯白噪声进行仿真实验. 实验中与传统的去噪方法进行对比, 其实验结果分别如图 2 所示.

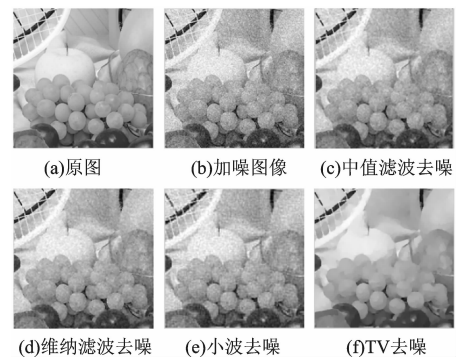


图 2 高斯噪声去噪对比效果图

通过仿真实验结果可以看出, 对高斯噪声的图像而言, 传统的去噪方法, 如中值滤波、维纳滤波、小波变换等方法, 虽然可以较好地去处噪声效果, 但在去噪的同时对图像的纹理也造成了极大的破坏, 造

成图像细节的模糊. 而基于压缩感知的改进的全变分(TV)去噪方法,引入了边缘引导函数,能够使边缘的扩展速率得到消弱,能够在去噪的同时,较好地保持图像的纹理和细节,从视觉效果来看,要优于其他去噪方法. 同时从客观进行评价,通过峰值信噪比大小判断图像去噪效果的好坏,通过多次仿真实验进行了验证,本文算法能够取得较较好地去噪效果.

表 1 给出了标准测试图像 fruits、peppers,在 δ 取不同值时不同方法的 PSNR 值比较. 图像恢复质量的评判标准为图像的峰值信噪比越高,图像的恢复质量越好. 从表 1 中的数据可以得出,无论是高噪声图像还是低噪声图像,基于压缩感知的 TV 去噪方法比传统的效果都好,在去噪的同时,较好的保持了图像的纹理、细节信息.

表 1 不同方法在 δ 取不同值时的 PSNR 值比较

图像	噪声标准差 δ	PSNR				
		噪声图像	中值滤波	维纳滤波	小波去噪	TV 去噪
fruits	15	23.54	24.87	25.11	26.22	30.43
	20	21.10	22.55	23.04	24.15	28.58
	25	19.17	20.63	21.43	22.54	27.21
lena	15	23.59	24.91	25.13	26.24	30.46
	20	22.13	22.59	23.06	24.18	28.61
	25	19.20	20.97	21.45	22.61	27.24

选用 fruits 标准测试图像作为原始图像,在保证添加的高斯噪声相同、系数度不变的情况下,通过增加测量值 M ,来研究重建图像随采样率的变化关系. 通过多次仿真实验,绘制出本文算法和基于压缩感知的 OMP 算法峰值信噪比随采样率变化曲线. 如图 3 所示.

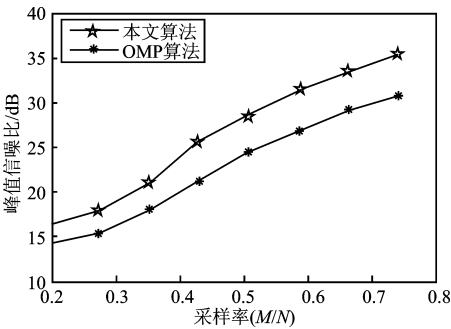


图 3 峰值信噪比随采样率变化曲线

通过峰值信噪比分析曲线可以明显看出,在保证系数度不变的条件下,通过增加测量值的个数,重构图像的重构效果有了明显的改善. 本文提出的算

法与传统的 OMP 压缩感知算法相比,处理后图像的峰值信噪比有了较大的提高.

5 结束语

本文基于压缩感知理论知识,提出了一种基于压缩感知的改进 TV 去噪方法. 其核心思想是,对混有高斯噪声的图像进行 DCT 变化,得到稀疏系数,采用高斯随机矩阵进行测量,对传统的 TV 模型进行了改进,加入了边缘引导函数,使得图像边缘的扩散速率得到了消弱,最后通过 TV 重建算法实现图像的恢复和噪声的去除. 大量实验证明了本文算法在去噪方面的有效性,在去除图像噪声的同时较好地保持了图像的边缘及纹理信息,也取得了较好的重构性能.

参考文献:

[1] Bo Han, Jintao Xiong, Jianyu Yang. Research on millimeter-wave image denoising method based on contourlet and compressed sensing [J]. IEEE International Conference on Signal Processing Systems, 2010, 1(2): 471-475.

[2] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651-1662

[3] Candes E, Romberg J. Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling [J]. Inverse problems, 2007, 23(3): 969-985.

[4] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.

[5] 刘国庆, 林京. 基于单层小波变换的自适应压缩感知图像处理[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2012, 35(1): 141-144.

[6] 谢殿广, 杨进华, 申琳, 等. 基于改进的自适应全变差模型的图像去噪算法 [J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2010, 33(4): 98-100.

[7] 何坤, 林涛, 琚生根, 等. TV 数值计算的图像去噪[J]. 电子科技大学学报, 2013, 42(3): 459-463.

作者简介:

徐立军 男, (1988-), 硕士研究生. 研究方向为压缩感知、无线传感器网络. E-mail: xulijun128@126.com.

杨秋翔 男, (1969-), 教授, 硕士生导师, CCF 会员. 研究方向为软件设计方法及、应用、网络技术应用.

雷海卫 男, (1980-), 博士研究生. 研究方向为压缩感知、无线传感器网络.